Пусть у нас есть:
Кривая C
Её точки будем обозначать буквой P, это будет переменная интегрирования.
Какая-то неоднородность, т.е. скалярная функция, определённая в каждой точки кривой. Её мы будем обозначать то μ(P), то ν(P).
M – какая-то точка.

От C мы потребуем, чтобы это была хорошая кривая, гладкая. А то если она будет ломаной какой-то, у нас в точках изломов не будет нормалей. Это недопустимо.

Тогда для кривой C мы можем подсчитать два интеграла:
Первый интеграл:

$$\boxed{v(M) = \oint\limits_C \mu(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P}$$

По определению это логарифмический потенциал простого слоя в двумерном случае.
Второй интеграл:

$$\boxed{\omega(M) = \oint\limits_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P = \oint\limits_C \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P,}$$

Логарифмический потенциал двойного слоя в двумерном случае.

Как вы понимаете, если M лежит не на кривой, то интеграл собственный, а вот если M лежит на прямой, то несобственный и не факт, что он сходится, а если сходится, не факт, что новая функция v или ω от аргумента M будет непрерывна.

Теорема 11.1.2. Если исходная функция μ(P) ограничена (|μ(P)|<N), то v(M) существует и непрерывна.
Теорема 11.1.3. Если исходная функция ν(P) ограничена (|ν(P)|<N), то ω(M) существует и… а вот с непрерывностью траблы:
Теорема 11.1.5. Если исходная функция ν(P) ограничена и кусочно-непрерывно, то ω(M) испытывает скачок на границе:

$$\omega^{(i)}(P_0) - \omega^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0), \;\; P_0 \in C.$$

Вот так вот: логпотеницциал простого слоя оказывается лучше логпотенциала двойного слоя: у первого всё в порядке и с существованием, и непрерывностью. Азазаза, затралил лалку, у него проблемы, а у меня, потенциала простого слоя, нет. А вот нифига. Логпотенциал простого слоя v(M) существует и с непрерывностью всё ОК, а вот с производной… хм… разрыв ☺

Теорема 11.1.6. *Пусть* $\mu(P) \in Q(\mathbb{R}^2), \; |\mu(P)| < N.$

Тогда при переходе через границу производная $\frac{\partial v}{\partial n}(M)$ *претерпевает скачок*

$$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) - \frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) = 2\pi\mu(P_0), \;\; P_0 \in C.$$

Теперь погнали в пространство. Пусть уже S – это поверхность. Опять-таки, потребуем, чтобы она была гладкой, т.е. в каждой точке у неё существовала нормаль.
Такие поверхности наз-ся поверхностями Ляпунова.

Вот это

$$\boxed{v(M) = \oint\limits_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}} d\sigma_P,}$$

Поверхностный интеграл простого слоя!

А это

$$\boxed{\omega(M) = \oint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM}}d\sigma_P = \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}d\sigma_P,}$$

Поверхностный интеграл двойного слоя!

И аналогично своим коллегам на кривой, скачок испытывают ω(M) и производная v(M).

Теорема 11.1.9. *Пусть* $\nu(P) \in Q(\mathbb{R}^3),\ |\nu(P)| < N$

Тогда при переходе через границу $\omega(M)$ *претерпевает скачок:*

$$\omega^{(i)}(P_0) - \omega^{(e)}(P_0) = 4\pi\nu(P_0),\ P_0 \in S.$$

Теорема 11.1.10. *Пусть* $\mu(P) \in Q(\mathbb{R}^3),\ |\mu(P)| < N.$

Тогда при переходе через границу производная $\frac{\partial v}{\partial n}(M)$ *претерпевает скачок:*

$$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) - \frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) = 4\pi\mu(P_0),\ P_0 \in S.$$

А теперь ответ на интересующих всех вопрос: АНАФИГНАЭТОМНАДО. Как известно, на ФФ очень уважают через интуры. И несколькие задачи из курса ММФ Боголюбов предлагает решать именно через интуры.

Например, $\begin{cases} \Delta\omega(M) = 0, \\ \omega(P) = g(P), \\ \omega(M) \in C^{(2)}(D_i) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_i). \end{cases}$ - внутренняя задача Дирихле.

Ищем решение в виде поверхностного потенциала двойного слоя

$$\omega(M) = \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PM}^2}d\sigma_P,$$

И получаем интур относительно неизвестной функции ν(P)

$$\boxed{\omega^{(i)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0) + \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2}d\sigma_P = g(P_0).}$$

И мы зачем-то свели задачу к интурам… Нафига? Какая же 11-я глава отстой. Зачем я взялся её конспектировать? Да ну.

А вот вам задача

$$\begin{cases} \triangle u(M) + \lambda\rho(M)u(M) = 0, & M \in D, \\ u(P) = 0, & P \in S, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}), \\ \rho(M) \in C^{(1)}(D). \end{cases}$$

На поиск СФ с ГУ Дирихле, но обратите внимания на дифур. Добавился вес ρ(M).
Оказывается, этот дифур равносилен

$$\triangle u(M) = -\lambda\rho(M)u(M) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(M) = \int\limits_D g(M,Q)\rho(Q)u(Q)dV_Q.}$$

В принципе рядом замен мы можем от веса избавиться.

Ну а далее приходят все наши теоремы из курса интуров:
1) СЗ существует и вообще их счётное число
2) Все они >0
3) Последовательность λ_n стремится к 0.
4) СФ ортогональны с весом ρ(M)

А знаете, в чём прикол? Это всё нам никак не поможет решить задачу на СЗ, то есть ЯВНО найти СЗ и СФ.
Это, кстати, вечная проблема интуров: куча теорем, о том какие решения хорошие, но на руки мы их не получим. Поэтому они и так бесполезны. Тьфу!